一次元連続系（電子系）における "exponential growth"

京大理物理　　長谷川　洋

Borlandに始まる「固有モードの exponential 増大の問題」は最近わが国の "lattice group" の人々によってとりあげられ、非周期系の統計物理学として本質的な課題を含むことが次第に明らかとなってきたように思われる。ここでは一電子に対する一次元シュレディンガー方程式の解の示す exponential 増大について得られた結果を報告する。（時間的制約のため、増大度の存在に関するステートメントを述べるにとどめ、それに関連する種々の物理的結論および次元数を 2以上に拡張する問題等については別の機会にまわす。）

定常状態に対するシュレディンガー方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0$$

の解 $\psi(x, E)$ の $x \to \pm\infty$ での漸近的性質を問題にする。

それはもちろんポテンシャル $V(x)$ の遠方でのふるまいによって左右される。よく知られているように自由電子あるいはブロッホ電子について $\psi(x) \sim O(e^{\kappa x})$（ある複素 E 一値に対し）であり、それはもっと一般の"乱雑な"ポテンシャルのもとでもそうではないかという期待を抱かせる。以下の結果はその一つの答えである。まず、

$$\frac{2m}{\hbar^2}E \equiv \lambda \quad , \quad \frac{2m}{\hbar^2}V(x) \equiv q(x) \quad \text{によって}$$

方程式を次の標準形で示す。

$$\psi'' = (q(x) - \lambda)\psi \tag{1}$$

また、　$f(x) = \dfrac{d}{dx}\log\psi(x)$　によって波動函数 ψ の対数微分を問題にするならば

$$f' = -f^2 + q(x) - \lambda \tag{2}$$

$$\psi(x, \lambda) = \exp\int_0^x f(\xi, \lambda)\,d\xi \tag{2a}$$

となる。方程式(1)は一階の微分方程式であり、未知函数および既知ポテンシャル函数が互いに分離されていることにより $f(x)$ を $q(x)$ に対する一種のレスポンスとしてとらえることが出来る点で有用であるが、一方 f の非線型項 f^2 を含む点が取り扱いを難かしくする。これに対し適当に線型化した無限個の方程式の解の一様極限として $f(x)$ が与えられるような函数列 $\{f_n(x)\}$ をえらぶことが可能である。

これを用いて(2)の解の性質をかなり精密に規定することが出来る。すなわち、

仮　定　　$q(x)$ は $x \in [-\infty, \infty]$ において有界連続とする。そのとき

Ⅰ　複素 λ ─平面の実軸上のある閉集合に属する点を除いて方程式(2)の解で $|f(x)|$ が $x \in [-\infty, \infty]$ で有界でありかつ $\mathrm{Re}f(x)>0$（または $\mathrm{Re}f(x)<0$）であるようなものがただ一つ存在する。それに対応して（2a）から作られる $\psi(x, \lambda)$ は $x \to \infty$ でたかだか exponential に増大、すなわち $|\psi(x, \lambda)| \leq e^{\kappa x}$（または、たかだか exponential に減少： $e^{-\kappa x} \leq |\psi(x, \lambda)|$）、$\kappa>0$ であり

$$\kappa(\lambda) = \overline{\lim_{X\to\infty}} \frac{1}{X} \int_0^X \mathrm{Re}f(x, \lambda)\,dx$$

$$\left(= -\underline{\lim_{X\to\infty}} \frac{1}{X} \int_0^X \mathrm{Re}f(x, \lambda)\,dx, \quad \mathrm{Re}f<0 \text{ に対し} \right)$$

Ⅱ　一般に $[-\infty, \infty]$ で有界な実連続函数 $f(x)$ に対

$$\underline{\lim_{X\to\infty}} \frac{1}{X} \int_0^X f(x)\,dx, \quad \overline{\lim_{X\to\infty}} \frac{1}{X} \int_0^X f(x)\,dx$$

が有限確定するが、この両方の値が一致するとき、$f(x)$ は $x \to \infty$ で長周期平均をもっと定義することが出来る。方程式(2)の解 Real, Imaginary part ともに $x\to\infty$ で長周期平均をもつならば、それに対応する $\psi(x, \lambda)$ は次の意味で、その exponential growth rate $\kappa(\lambda)$ が確定する。

$$\psi(x, \lambda) = e^{\kappa(\lambda)x + O(x, \lambda)} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} O(x, \lambda) = 0 \tag{3a}$$

$$\kappa(\lambda) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \int_0^X f(x, \lambda)\,dx \quad \left(= \overline{\lim} = \underline{\lim}\right) \tag{3b}$$

Ⅲ　ポテンシャル $q(x)$ が単に〔$-\infty$, ∞〕で有界連続という条件だけからは普通の意味の極限（３ｂ）の存在は保証されない。それが保証される一つの十分条件は $q(x)$ が概周期函数すなわち

$$q(x) = s-\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu}^{n} q_{\nu} e^{iK_{\nu}x} \qquad \sum_{\nu}^{\infty} q_{\nu} < \infty \tag{4}$$

とあらわされる函数である。このとき　$\mathrm{Re}\, f > 0$（又は <0）を満す方程式(2)の唯一解もまた概周期となり

$$\kappa(\lambda) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_{0}^{X} f(x,\lambda)\,dx = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_{-X}^{0} f(x,\lambda)\,dx$$
$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X}\int_{-X}^{X} f(x,\lambda)\,dx \tag{5}$$

しかしながらより広範囲な応用を許すためには長周期平均の概念そのものを拡張して普通の意味の極限（３ｂ）が存在しない場合にもこれに相当する growth rate $\kappa(\lambda)$ をきめることが望まれる。函数解析における Hahn－Banach　定理はこのことを可能にしている（詳細は略）。かくして微分方程式(2)の imput 函数 $q(x)$ と response 函数 $f(x)$ との対応関係は $R=$〔$-\infty$, ∞〕の有界連続函数の族 $C(R)$ から $C(R)$ の中への連続写像であって、$\kappa(\lambda)$ は $C(R)$ の上に定議された一つの線型汎函数とみることが出来る。

３次元無秩序系における局在度 Ⅰ

北大理　　堀　　淳一

無秩序系における固有モードの局在の問題は２つの異なる立場から議論されてきた。１つは Mott－Twose に始まり、Robests－Makinson, Borland, Halperin, Matsuda－Ishii, Hori および Tong などによって多少とも厳密に定式化されてきた phase theory による取扱いであり、他の１つは Anderson に始まって最近では Thouless, Economou－Cohen　などによって行なわれている self－energy の